Para una resolución de la prueba piloto
(Sebastian P. Grynberg, 27/06/20)

1. Un sistema de generadores para el subespacio

$$\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} X \right\}$$

es:

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Solución. [*Referencia: ejercicio* **1.7**]

Quienes resolvieron el ejercicio **1.7** aprendieron que las únicas matrices $X \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ que conmutan con las matrices diagonales de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$, son las matrices diagonales de 2×2:

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \tag{1}$$

con $a, b \in \mathbb{K}$. De allí se obtiene, por simple inspección, que la única opción que tiene alguna posibilidad de ser correcta es la que se indica en el inciso (a) porque

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

es el único conjunto de los cuatro que se ofrecen que está contenido en $\mathbb{S}$. Para corroborarlo se puede utilizar el siguiente argumento.

De (1) se deduce que $\dim(\mathbb{S}) = 2$ porque $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{S}$. Como el conjunto de matrices

$$\mathcal{B}' := \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente, contiene dos elementos y está contenido en $\mathcal{G}$, tiene que ser una base de $\mathbb{S}$ por razones dimensionales. Lo que falta es observar que

$$\mathbb{S} = \text{gen}\mathcal{B}' \subseteq \text{gen}\mathcal{G} \subseteq \mathbb{S}.$$

$\square$

2. La solución del problema

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 0,$$

sujeto a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ es:

(**a**) $y = 2e^{x} - e^{2x}$.

(**b**) $y = 3e^{x} - 2e^{2x}$.

(**c**) $y = 3e^{-x} - 2e^{-2x}$.

(**d**) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

Solución. [*Referencia: ejercicios* **1.18, 1.19, 2.33, 2.34**]

Quienes resolvieron los ejercicios de referencia aprendieron que para obtener una base del espacio solución de la ecuación diferencial homogénea

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 0 \tag{1}$$

alcanza con examinar las raíces de su polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. En este caso está claro que las raíces de dicho polinomio son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, razón por la que todas las soluciones de la ecuación (1) son de la forma

$$y = ae^{x} + be^{2x}, \tag{2}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Eso descarta las opciones que se ofrecen en los incisos (**c**) y (**d**). Lo que falta es hallar los valores de a y b para que la solución satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Como $y(0) = a + b$ e $y'(0) = a + 2b$, los valores de a y b son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + 2b = 0, \end{cases}$$

vale decir $a = 2$ y $b = -1$. De donde se concluye que *la solución del problema* $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$*, sujeto a las condiciones iniciales* $y(0) = 1$*,* $y'(0) = 0$ es $y = 2e^{x} - e^{2x}$ (que es la opción que se ofrece en el inciso (**a**)). La opción (**b**) queda descartada porque la solución anterior es única. $\square$

---

3. Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ es la transformación lineal tal que

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) &= -2 + 3x - 4x^2, \\ T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right) &= -6 + 9x - 12x^2, \\ T\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) &= 2 - 3x + 4x^2, \end{aligned}$$

entonces todas las soluciones de la ecuación $T(v) = 1 - \frac{3}{2}x + 2x^2$ son de la forma

(**a**) $v = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T + b\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

(**b**) $v = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T + b\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

(**c**) $v = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, con $a \in \mathbb{R}$.

(**d**) $v = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución. [*Referencia: ejercicio* **2.12**]

Quienes resolvieron los ejercicios de referencia aprendieron que todas las soluciones de la ecuación lineal

$$T(v) = w,$$

con $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ y $w \in \mathrm{Im}(T)$, son de la forma

$$v = v_p + v_n,$$

donde $T(v_p) = w$ y $v_n \in \mathrm{Nu}(T)$.

Así que lo primero será comprobar que $T\left(\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T\right) = 1 - \frac{3}{2}x + 2x^2$. Como

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right),$$

la linealidad de T nos permite comprobar que

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}^T\right) &= \frac{1}{4}\left(T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) - T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-2 + 3x - 4x^2 - \left(-6 + 9x - 12x^2\right)\right) \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + 2x^2. \end{aligned}$$

A simple vista se observa que $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{2 - 3x + 4x^2\}$ y en consecuencia $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, el teorema de la dimensión para las transformaciones lineales con dominios de dimensión finita nos permite concluir que $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 2$. Esto es suficiente para descartar las opciones ofrecidas en los incisos (**c**) y (**d**).

La linealidad de T también nos permite observar a simple vista que

$$\begin{aligned} 0 &= T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) + T\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) = T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right), \\ 0 &= 3T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) - T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = T\left(\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\end{bmatrix}^T\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Como el núcleo de cualquier transformación lineal es un subespacio y en este caso particular tiene dimensión 2, de (1) se deduce inmediatamente que $B = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$. Se concluye que *todas las soluciones de la ecuación* $T(v) = 1 - \frac{3}{2}x + 2x^2$ *son* las de la forma que se presenta en el inciso (**a**). La opción que se propone en el (**b**) queda descartada porque el vector $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T \notin \mathrm{Nu}(T)$. $\square$

---

4. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(p) = \begin{bmatrix} p(1) & p''(1) \end{bmatrix}^T$.

(**a**) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{T(x-1), T((x-1)^3)\}$.

(**b**) $\mathrm{Nu}(T) \cap \mathrm{gen}\{1, x, x^2\} = \{0\}$.

(**c**) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{T(1), T((x-1)^2)\}$.

(**d**) $\mathrm{Nu}(T) = \{x-1, (x-1)^3\}$.

Solución. [*Referencia: ejercicios* **2.16, 2.17**. *Ver también el inciso* (**c**) *del* **1.17**]

Quienes resolvieron los ejercicios **2.16** y **2.17** aprendieron a utilizar las ideas de la demostración del teorema de la dimensión para analizar el comportamiento de una transformación lineal cuando el dominio tiene dimensión finita, que es el caso del presente ejercicio.

En primer lugar, se caracteriza el núcleo de T mediante una base del mismo. Aquí $p \in \mathrm{Nu}(T)$ si y solo si $p(1) = 0$ y $p''(1) = 0$. Eso significa que si se elige la base $\mathcal{B} = \left\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\right\}$ para representar a los polinomios de $\mathbb{R}_3[x]$, los polinomios que pertenecen al núcleo son de la forma

$$p(x) = \frac{p'(1)}{1!}(x-1) + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

por culpa del desarrollo de Taylor centrado en el 1 que se aprende en el CBC (y en Análisis Matemático II que se enseña en nuestra Facultad)[1]. De acá se concluye que $\left\{x-1, (x-1)^3\right\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$. Eso permite descartar la opción que se ofrece en el inciso (**a**) porque $T(x-1) = T\left((x-1)^3\right) = 0$ y $T \neq 0$, también descarta la (**b**) porque $x - 1 \in \mathrm{Nu}(T) \cap \mathrm{gen}\{1, x, x^2\}$; la opción (**d**) está descartada porque el conjunto $\left\{x-1, (x-1)^3\right\}$ no es un subespacio.

Para corroborar que la opción (**c**) es la correcta se utiliza el siguiente paso de la demostración del teorema de la dimensión: como el conjunto $\{1, (x-1)^2\}$ es lo que le falta a la base del núcleo de T para ser una base de $\mathbb{R}_3[x]$, la imagen del conjunto $\{1, (x-1)^2\}$ por T es una base de la imagen de T. $\square$

[1] O también en la resolución del **1.17** (**a**) de la actual Guía de trabajos prácticos.

---

5. En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno definido por la fórmula

$$\langle x, y\rangle := y^T \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x$$

el área del triángulo de vértices $[0,0]^T, [1,0]^T, [0,1]^T$ es:

(a) $\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{11}{4}$.

(c) $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

(d) $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

Solución. [*Referencia: ejercicios* **3.4, 3.5, 3.6, 3.7**]

Quienes resolvieron el ejercicio **3.4** aprendieron el significado geométrico de los coeficientes de la matriz del producto interno respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. El Oráculo de la Guía, , invitaba a re-conocer que sin importar cuál fuese la forma particular del producto interno elegido, la introducción de un producto interno en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial lo convertía en un caso particular del espacio geométrico de Euclides y en consecuencia heredaba del mismo todos los resultados conocidos de la geometría elemental. Sin temor a equivocarse se puede decir que *el área de un triángulo es "la mitad de la base por altura"*. En este caso, esa sentencia significa que el área del triángulo de vértices $0, e_1, e_2$ es

$$\frac{1}{2}\|e_1\|\|e_2\| \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es el ángulo formado los vectores e_1 y e_2.

Por simple inspección de la matriz

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

que define al producto interno, se advierte que $\|e_1\| = \sqrt{3}$, $\|e_2\| = 1$, y $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. De allí que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}\sqrt{11}}{6}$, motivo por el cual el área solicitada es

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{11}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

Se concluye que la única opción correcta es la (**d**) y que todas las demás son falsas.

$\square$

6. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Si $M = \text{mín}_{a\in\mathbb{R}} \|x^2 - a\|^2$, entonces

(**a**) $M = \frac{4}{45}$.

(**b**) $M = 0$.

(**c**) $M = \frac{1}{3}$.

(**d**) $M = \frac{2}{3}$.

Solución. [*Referencia: ejercicios* **3.16, 3.17, 3.18, 3.19**]

Quienes resolvieron los ejercicios de referencia aprendieron que fijado un subespacio de dimensión finita $\mathbb{S}$ y dado un vector $w \notin \mathbb{S}$ vale que

$$\min_{v\in\mathbb{S}} \|w - v\|^2 = \|w - P_{\mathbb{S}}(w)\|^2, \tag{1}$$

donde $P_{\mathbb{S}}(w)$ es la proyección ortogonal de w sobre $\mathbb{S}$. En este caso particular tenemos que

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \|x^2 - a\|^2 = \|x^2 - P_{\text{gen}\{1\}}(x^2)\|^2, \tag{2}$$

de modo que el problema se reduce a determinar primero la proyección de x^2 sobre el subespacio de las constantes, y en segundo lugar a calcular el error cuadrático.

Tenemos que

$$P_{\text{gen}\{1\}}(x^2) = \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

porque

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

y

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 dx = 1.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\left\|x^2 - P_{\text{gen}\{1\}}(x^2)\right\|^2 &= \left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\|^2 = \left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle == \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.\end{aligned}$$

Se concluye que la única opción correcta es la que se ofrece en el inciso (**a**) y que todas las demás son falsas. □